634.0.612

Király László
Gémesi József

A BACKMAN-FÜGGVÉNY ALKALMAZÁSA KISS REZSŐ KOCSÁNYOS TÖLGY FATERMÉSI TÁBLÁJÁRA

Ma már ismeretes tény, hogy a kor és a növedékértékek függvényszerű ösz szefüggését kifejező növekedés- és növedékgörbéknek meghatározott alakja van, amelyek az organikus növekedésre általánosságban jellemzőek. A növekedésnek ezt a törvényszerűségét Backman svéd kutató az alábbi függvénynyel írja le:

$$\log y' = k_0 + k_1 \log t + k_2 \log^2 t$$

ahol t — az életkor
y' — a t életkorban a folyónövedék
k_0, k_1, k_2 — paraméterek

Vatkovszkij O. Sz. „A Backman-függvény használatának lehetőségeiről a faállományok növekedésének tanulmányozásakor" (1972) című tanulmányában bebizonyítja, hogy a Backman-függvény nemcsak a folyó-, hanem az átlagnövedékre is használható, s ez jelentősen megnöveli alkalmazhatóságának lehetőségeit.

Ezt a tulajdonságát kihasználva tűztük ki célul, hogy a jelenleg érvényben levő egyik legjobb fatermési táblát, amelyet *Kiss R.* a mageredetű kocsányos tölgyre készített, függvényesítsük. (Választásunkat indokolta az a körülmény is, hogy Vatkovszkij is tölgyre alkalmazta a függvényt.)

Első lépésben a fafaj átlagos növekedési viszonyait kifejező III. fatermési osztály általunk kiválasztott alapadatsoraira illesztettük rá a Backman-függvényt, amely a következő alakban írható le:

$$Y = e^{a + b \ln t + c \ln^2 t} \tag{1}$$

ahol $Y = y/t$ átlagnövedék
t életkor
y függvényérték $h, d, v, ö$
h átlagmagasság
d átlagátmérő
v főállomány fatömege
$ö$ összes fatermés fatömege
a, b, c paraméterek

A paraméterek meghatározására két pontot használtunk, egy célszerűen megválasztott $P_1(Y_1; t_1)$ pontot és a függvény szélsőérték pontját $P_m(Y_m, t_m)$.

A paraméterek meghatározásának levezetése:

$$\frac{Y_1}{Y_m} = e^{b(\ln t_1 - \ln t_m) + c(\ln^2 t_1 - \ln^2 t_m)} \tag{2}$$

A fenti hányados logaritmusa

$$\ln \frac{Y_1}{Y_m} = b \ln \frac{t_1}{t_m} + c \ln \frac{t_1}{t_m} \ln t_1 t_m \tag{3}$$

A függvény szélsőértéke ott van, ahol a deriváltja nulla. Tehát

$$b = -2c \ln t_m$$

Behelyettesítve a (4)-es egyenletet a (3)-ba kapjuk, hogy (4)

$$\ln \frac{Y_1}{Y_m} = c \ln \frac{t_1}{t_m} (\ln t_1 t_m - 2 \ln t_m) = c \ln^2 \frac{t_1}{t_m} \tag{5}$$

Így a paraméterek a következők:

$$c = \frac{\ln \frac{Y_1}{Y_m}}{\ln \frac{t_1}{t_m}} \tag{6}$$

$$b = -2c \ln t_m \tag{7}$$

$$a = \ln Y_m - b \ln t_m - c \ln^2 t_m \tag{8}$$

A paramétereket valamennyi alapadatsorra kiszámítottuk, majd az illesztés pontosságát ellenőriztük. Ha nem értünk el megfelelő pontosságot, az illesztési pontokat módosítottuk s az egész eljárást megismételtük. Számítógépet a számításhoz nem vettünk igénybe, csupán egy kis, programozható HP-25-ös zsebszámológéppel dolgoztunk.

A kapott állományjellemző függvények (az index a fatermési fokra, az összfatermés maximális átlagnövedékének 0,865-szorosára utal. Ez ugyanis itt 10 m^3/év):

magasság

$$h_{10} = te^{-4.654 + 2.454 \ln t - 0.372 \ln^2 t} \tag{9}$$

átmérő

$$d_{10} = te^{-3,121 + 1,348 \ln t - 0,183 \ln^2 t} \tag{10}$$

főállomány fatömege

$$v_{10} = te^{-2,871 + 2,513 \ln t - 0,341 \ln^2 t} \tag{11}$$

összes fatermés fatömege

$$\ddot{o}_{10} = te^{-2,855 + 2,713 \ln t - 0,347 \ln^2 t} \tag{12}$$

A törzsszámra valamivel bonyolultabb összefüggést választottunk, mivel szükséges volt, hogy a függvénynek helyi szélsőértéke legyen.

$$n_{10} = \frac{10\,000}{t\sqrt{t}} e^{7,220 - 2,310 \ln t + 0,295 \ln^2 t} \tag{13}$$

(A későbbiek során ezt a függvényt az átmérő függvényéből fogjuk levezetni.)

Az alakszámot már a fenti egyenletekből számoltuk az

$$f = \frac{4v}{d^2 \pi n h}$$ összefüggés alapján.

$$f = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{1,047 - 0,327 \ln t + 0,102 \ln^2 t} \tag{14}$$

A képlettel számított alakszámok jól illeszkednek a táblából számított alakszámokhoz. Az alakszámhoz hasonlóan elkészíthető bármely származtatott állományjellemző (pl. körlapösszeg, átlagos termőterület) függvénye a fenti függvények alapján. A fenti egyenletek extrapolálhatók és interpolálhatók,

tehát megfelelnek bármilyen időbeosztású és bármilyen időszakra vonatkozó fatermési tábla összeállításához. Az 1. táblázat összehasonlítja a táblabeli és a függvény által számított értékeket. Utolsó sorában a számított értékek szórásszázaléka olvasható ki. Törzsszám esetében a szórásszázalékot a fatömeggel súlyozva számítottuk ki.

A második lépésben a többi fatermési osztályra — a III. fatermési osztályra elkészült függvények ismeretében — egy általános egyenletet állítottunk fel, amely az összes fatermési osztályra vonatkozó adatokat a kor függvényében előállítja.

Az egyenlet általános alakja a következő:

$$h = h_{10}\left[1 + (k-10)\left(\frac{0{,}36056}{\ln t} - 0{,}01921\right)\right] \tag{15}$$

$$d = d_{10}\left[1 + (k-10)\left(\frac{0{,}38492}{\ln t} - 0{,}02592\right)\right] \tag{16}$$

$$v = v_{10}\left[1 + (k-10)\left(\frac{0{,}11431}{\ln t} - 0{,}02359\right)\right] \tag{17}$$

$$\ddot{o} = \ddot{o}_{10}\left[1 + (k-10)\left(\frac{0{,}26724}{\ln t} - 0{,}03162\right)\right] \tag{18}$$

ahol k az adott termőhelynek, ill. az adott (t, h) értékpárnak megfelelő fatermési fok (az összfatermés átlagnövedékének 0,865-szerese).

A törzsszám esetében az n-hez nem sikerült kielégítően illeszkedő $n(t)$ függvényt találni. Ezért az

$$n = r'd^s \quad \text{ill. az} \quad \ln n = r + s \ln d \tag{19}$$

összefüggést felhasználva (*Sopp L.* tanácsa alapján) fejeztük ki a törzsszámot az átmérő függvényében (r, s a meghatározandó paraméterek):

$$n = e^{11{,}312 - 1{,}612 \ln d} \tag{20}$$

A kapott általános egyenletekkel előállított adatok a táblabeli értékekhez jól illeszkednek. Ennek igazolására közöljük az I., II., IV., V., VI. fatermési osztály táblabeli és számított adatait (2—6. táblázat).

A fatermési táblák pontosságát ismerve az elért illesztési pontosságot megfelelőnek tartjuk.

Összefoglalva megállapítható, hogy a Backman-függvény hazai kocsányos tölgyeseinkre alkalmazható. Segítségével előállítottuk a mageredetű kocsányos tölgy III. fatermési osztályának jellemző adatait, amelyek megfelelő pontossággal illeszkednek a fatermési tábla adataihoz. A függvény extrapolálható és interpolálható. A III. fatermési osztály függvényeiből előállítottunk egy olyan általános függvényt, amely mind a hat fatermési osztály adatait magában foglalja. A faállomány-jellemzők kiszámításához összesen 23 paraméter szükséges.

A fatermési függvényrendszer használatához adott független változónak tételezzük fel a kor (t), az átlagmagasság (h), a termőhelyvizsgálat alapján becsült fatermési fok (k_0) és a vágásérettségi kor (s) értékeket.

Első lépésként kiszámítjuk a h_{10}, d_{10}, v_{10}, $\ddot{o}_{10}$ értékeket a (9)—(12)-es függvények alapján.

Azután meghatározzuk a faterméstani alapon becsült fatermési fok (k_t) értékét a

$$k_t = \frac{h - h_{10}}{h_{10}[0{,}36056\,(\ln t - 0{,}01921)]} + 10 \tag{21}$$

összefüggés alapján.

1. táblázat

III. fatermési osztály

$k=10$ fatermési fok

Életkor	Főállomány								Összes fatermés fatömege	
	átlag-magassága		átmérője		törzsszáma		fatömege			
	táblai	számított	táblai	számított	táblai	számított	táblai	számított	táblai	számított
év	m		cm		db		m³		m³	
10	4,9	3,8	3,9	3,7	6050	10 113	34	30	56	47
20	10,7	10,6	9,4	9,6	2133	2 131	98	98	167	172
30	16,1	16,2	15,5	15,6	980	977	169	171	313	318
40	20,8	20,4	21,1	21,2	600	596	233	232	454	456
50	23,4	23,5	26,2	26,0	423	420	289	286	580	580
60	25,7	25,8	30,8	30,6	325	323	334	331	690	690
70	27,2	27,3	34,8	35,0	265	262	369	367	784	784
80	28,3	28,0	38,5	38,4	224	221	396	393	863	856
90	29,1	28,8	41,9	42,3	194	192	419	419	928	927
100	29,7	29,0	45,1	45,0	172	171	438	438	982	980
Szórás %	0,8		0,9		1,5 □		1,0		0,9	

□ A törzsszám szórása a fatömeggel súlyozva

2. táblázat

I. fatermési osztály

$k=13,857$ fatermési fok

Életkor	Főállomány								Összes fatermés fatömege	
	átlag-magassága		átmérője		törzsszáma		fatömege			
	táblai	számított	táblai	számított	táblai	számított	táblai	számított	táblai	számított
év	m		cm		db		m³		m³	
10	7,5	5,8	6,0	5,7	3392	4946	52	46	89	74
20	15,3	14,7	13,5	13,4	1132	1247	142	140	243	252
30	21,6	21,6	20,7	20,8	585	614	231	238	438	453
40	26,3	26,6	27,4	27,6	377	389	315	317	626	639
50	29,8	30,1	33,4	33,3	276	287	387	386	795	803
60	32,3	32,7	38,8	38,6	217	226	447	443	944	948
70	33,8	34,2	43,3	43,7	183	185	494	488	1070	1070
80	34,9	34,8	47,5	47,6	159	162	534	520	1176	1162
90	35,8	35,6	51,6	52,0	140	140	572	551	1266	1252
100	36,5	35,7	55,5	55,0	126	128	607	575	1340	1319
Szórás%	1,0		0,4		3,1 □		4,2		1,9	

□ A törzsszám szórása a fatömeggel súlyozva

3. táblázat

II. fatermési osztály

$k = 11{,}885$ fatermési fok

Életkor	Főállomány								Összes fatermés fatömege	
	átlag-magassága		átmérője		törzsszáma		fatömege			
	táblai	számított	táblai	számított	táblai	számított	táblai	számított	táblai	számított
év	m		cm		db		m³		m³	
10	6,2	4,9	5,0	4,7	4388	6750	43	38	72	60
20	13,0	12,6	11,4	11,5	1528	1595	119	119	204	211
30	18,8	18,9	18,0	18,2	754	761	199	203	375	384
40	23,3	23,4	24,2	24,3	470	478	272	273	539	545
50	26,6	26,7	29,8	29,5	337	349	337	334	687	689
60	29,0	29,2	34,8	34,5	263	271	389	386	816	816
70	30,5	30,5	39,0	39,3	219	220	428	426	926	924
80	31,6	31,3	43,0	42,9	187	191	460	455	1020	1006
90	32,5	32,1	46,8	47,1	163	164	492	484	1098	1086
100	33,1	32,3	50,3	49,9	146	150	518	505	1161	1146
Szórás%	2,6		1,0		2,6□		1,0		1,3	

□ A törzsszám szórása fatömeggel súlyozva

4. táblázat

IV. fatermési osztály

$k = 8{,}122$ fatermési fok

Életkor	Főállomány								Összes fatermés fatömege	
	átlag-magassága		átmérője		törzsszáma		fatömege			
	táblai	számított	táblai	számított	táblai	számított	táblai	számított	táblai	számított
év	m		cm		db		m³		m³	
10	3,6	2,8	2,9	2,7	8485	16496	25	22	39	34
20	8,4	8,6	7,4	7,7	3163	3046	78	78	129	133
30	13,3	13,5	12,8	13,0	1375	1309	138	138	250	252
40	17,3	17,4	18,0	18,1	790	768	194	191	367	367
50	20,3	20,2	22,7	22,5	541	541	242	237	472	471
60	22,4	22,4	26,9	26,7	408	410	282	276	564	564
70	23,9	23,9	30,6	30,7	328	328	312	308	641	644
80	25,0	24,7	34,0	33,9	274	279	336	331	706	706
90	25,8	25,6	37,2	37,5	235	237	355	354	759	768
100	26,3	25,8	40,0	40,1	207	213	369	371	803	814
Szórás%	0,9		1,0		2,5□		1,8		1,3	

□ A törzsszám szórása a fatömeggel súlyozva

5. táblázat

V. fatermési osztály

k=6,142 fatermési fok

Életkor	Főállomány								Összes fatermés fatömege	
	átlag-magassága		átmérője		törzsszáma		fatömege			
	táblai	számí-tott	táblai	számí-tott	táblai	számí-tott	táblai	számí-tott	táblai	számí-tott
év	m		cm		db		m³		m³	
10	2,3	1,8	1,8	1,7	—	—	16	14	23	20
20	6,1	6,5	5,4	5,8	5240	4809	60	56	90	92
30	10,6	10,8	10,2	10,3	2044	1906	109	104	188	183
40	14,3	14,5	14,9	14,8	1095	1062	158	147	282	273
50	17,1	16,9	19,2	18,7	715	729	198	186	365	356
60	19,1	19,0	22,9	22,6	534	537	231	219	438	432
70	20,6	20,4	26,4	26,3	418	420	257	246	499	498
80	21,7	21,2	29,5	29,2	345	355	278	266	549	549
90	22,4	22,0	32,3	32,6	295	297	294	286	591	601
100	22,9	22,4	34,8	35,0	259	265	305	301	626	641
Szórás %	2,7		1,7		2,1 □		0,1		0,2	

□ A törzsszám szórása a fatömeggel súlyozva

6. táblázat

VI. fatermési osztály

k=4,256 fatermési fok

Életkor	Főállomány								Összes fatermés fatömege	
	átlag-magassága		átmérője		törzsszáma		fatömege			
	táblai	számí-tott	táblai	számí-tott	táblai	számí-tott	táblai	számí-tott	táblai	számí-tott
év	m		cm		db		m³		m³	
10	1,0	0,8	—	—	—	—	7	6	7	7
20	3,8	4,4	3,3	3,9	—	—	44	35	52	53
30	7,8	8,1	7,5	7,8	3439	2983	83	72	125	117
40	11,3	11,4	11,8	11,6	1627	1573	122	106	195	183
50	13,9	13,7	15,6	15,2	1015	1018	157	137	258	247
60	15,8	15,6	19,0	18,6	727	735	185	164	312	306
70	17,3	17,1	22,1	22,0	560	561	208	187	357	358
80	18,4	17,9	25,0	24,7	452	465	225	204	391	400
90	19,1	18,7	27,5	27,8	382	384	238	221	420	442
100	19,5	19,2	29,6	30,1	336	338	247	235	445	475
Szórás %	3,0		2,6		1,8 □		10,6		5,6	

□ A törzsszám szórása a fatömeggel súlyozva

Dinamikus bonitálással meghatározzuk a véghasználatkor várható fatermési fokot (k_s) a

$$k_s = \frac{s-t}{s} k_0 + \frac{t}{s} k_t \tag{22}$$

összefüggés segítségével.

Végül meghatározzuk az egyes állományjellemzők értékét a (15)—(20) függvényekből a $k = k_t$ és a t, h_{10}, d_{10}, v_{10}, $\ddot{o}_{10}$ értékek alapján. Ha prognosztikai célokra akarjuk felhasználni a függvényt, pl. adott p korra (ahol $t < p \leq s$), akkor $t = p$ és

$$k = k_p = \frac{s-p}{s-t} k_t + \frac{p-t}{s-t} k_s$$

értékeket, valamint a $t = p$ korra a (9)—(12) függvények alapján kiszámított h_{10}, d_{10}, v_{10}, $\ddot{o}_{10}$ értékeket helyettesítjük be a (15)—(20) függvényekbe.

A továbbiakban szeretnénk kipróbálni függvényünket a többi fafajra is, hogy egységes metodikájú — viszonylag egyszerű — matematikai alapokon nyugvó fatermési függvényrendszer valamennyi fafajra, a számítógépes programozás számára közvetlenül felhasználható formában rendelkezésünkre álljon.

Кирай Л., Гемеши Й.: ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ФУНКЦИИ БАКМАНА ДЛФ ТАБЛИЦЫ ХОДА РОСТА ДУБА ЧЕРЕШЧАТОГО, СОСТАВЛЕННОЙ Р. КИШШЕМ

После проверки возможности использования функции Бакмана для дуба черешчатого по методу О. С. Ватковского, удалось развернуть систему функций для определения всех основных параметров древостоев. Система функций пользуется 23 параметрами и предоставляемая ею модель древесной продукции может быть непосредственно использована для изготовления программы на вычислительной машине.

Király, L.—Gémesi, J.: THE APPLICATION OF THE BACKMAN-EQUATION ON R. KISS' YIELD TABLE FOR QUERCUS ROBUR

The development of a system of equations applicable for all major characteristics of tree stands became possible, and it was tested for Euercus robur, by using the Backman-equation according to O.S. Vatkovskij. 23 parameters have been involved in the system of equations, and its resultant model of timber yield can be directly applied for preparing a computer program.

A lapban megjelent tanulmányok szerzői: *Fialka Géza* osztályvezető, Agrártudományi Egyetem Munkaszervezési és Munkavédelmi Intézete, Gödöllő; *Gémesi József* erdőmérnök, Állami Erdőrendezőségek Műszaki Irodája, Budapest; *Huszárné Székely Gizella* tud. munkatárs, Erdészeti Tudományos Intézet, Gödöllő; *Király László* osztályvezető, Állami Erdőrendezőségek Műszaki Irodája, Budapest; *dr. Schmidt Ernő* vezérigazgató, Nyugatmagyarországi Fagazdasági Kombinát; *dr. Solymos Rezső* tud. főosztályvezető, Erdészeti Tudományos Intézet, Budapest; *Szántó Gábor* igazgató, Erdőrendezőség, Kaposvár; *dr. Toda Ryookiti* tudományos kutató, Erdészeti Kutató Intézet, Tokió; *dr. Walz Géza* tud. főmunkatárs, Agrártudományi Egyetem, Gödöllő.